EJERCICIOS DE VARIABLES BIDIMENSIONALES

1.- Cinco niños de 2, 3, 5, 7 y 8 años de edad pesan, respectivamente, 14, 20, 32, 42 y 44 kilos.

1 Hallar la ecuación de la recta de regresión de la edad sobre el peso.

2 ¿Cuál sería el peso aproximado de un niño de seis años?

x_i	y_i	$x_i \cdot y_i$	x_i^2	y_i^2
2	14	4	196	28
3	20	9	400	60
5	32	25	1 024	160
7	42	49	1 764	294
8	44	64	1 936	352
25	152	151	5 320	894

$$\bar{x} = \frac{25}{5} = 5 \qquad \bar{y} = \frac{152}{5} = 30.4$$

$$\sigma_x^2 = \frac{151}{5} - 5^2 = 5.2 \qquad \sigma_y^2 = \frac{5320}{5} - 30.4^2 = 139.84$$

$$\sigma_{xy} = \frac{894}{5} - 5 \cdot 30.4 = 26.8$$

$$x - 5 = 0.192\,(y - 30) \qquad x = 0.192y - 0.76$$

$$y - 30.4 = 5.15\,(x - 5) \qquad y = 5.15x + 4.65$$

$$y = 5.15 \cdot 6 + 4.65 = 35.55 \text{ Kg}$$

2.- Un centro comercial sabe en función de la distancia, en kilómetros, a la que se sitúe de un núcleo de población, acuden los clientes, en cientos, que figuran en la tabla:

Nº de clientes (X)	8	7	6	4	2	1
Distancia (Y)	15	19	25	23	34	40

1 Calcular el coeficiente de **correlación lineal**.

2 Si el centro comercial se sitúa a 2 km, ¿cuántos clientes puede esperar?

3 Si desea recibir a 500 clientes, ¿a qué distancia del núcleo de población debe situarse?

x_i	y_i	$x_i \cdot y_i$	x_i^2	y_i^2
8	15	120	64	225
7	19	133	49	361
6	25	150	36	625
4	23	92	16	529
2	34	68	4	1 156
1	40	40	1	1 600
28	156	603	170	4 496

$$\bar{x} = \frac{28}{6} = 4.67 \qquad \bar{y} = \frac{156}{6} = 26$$

$$\sigma_x^2 = \frac{170}{6} - 4.67^2 = 6.53 \qquad \sigma_y^2 = \frac{4496}{6} - 26^2 = 73.33$$

$$\sigma_x = \sqrt{6.53} = 2.55 \qquad \sigma_y = \sqrt{73.33} = 8.56$$

$$\sigma_{xy} = \frac{603}{6} - 4.677 \cdot 26 = -20.92$$

$$r = \frac{-20.92}{2.55 \cdot 8.56} = -0.96$$

Correlación negativa muy fuerte.

$$x - 4.67 = \frac{-20.92}{73.33}(y - 26) \qquad x = -0.29y + 12.09$$

$$x = -0.29 \cdot 2 + 12.09 = 1151 \text{ clientes}$$

$$y - 26 = \frac{-20.92}{6.53}(x - 4.67) \qquad y = -3.2x + 40.96$$

$$y = -3.2 \cdot 5 + 40.96 = 24.96 \text{ km}$$

3.- Las notas obtenidas por cinco alumnos en Matemáticas y Química son:

Matemáticas	6	4	8	5	3. 5
Química	6. 5	4. 5	7	5	4

Determinar las **rectas de regresión** y calcular la nota esperada en Química para un alumno que tiene 7.5 en Matemáticas.

x_i	y_i	$x_i \cdot y_i$	x_i^2	y_i^2
6	6. 5	36	42. 25	39
4	4. 5	16	20. 25	18
8	7	64	49	56
5	5	25	25	25
3. 5	4	12. 25	16	14
26. 5	27	153. 25	152. 5	152

$$\bar{x} = \frac{26.5}{5} 5.3 \qquad \bar{y} = \frac{27}{5} = 5.4$$

$$\sigma_x^2 = \frac{153.25}{5} - 5.3^2 \; 2.56 \qquad \sigma_y^2 = \frac{152.5}{5} - 5.4^2 = 1.3$$

$$\sigma_{xy} = \frac{152}{5} - 5.3 \cdot 5.4 = 1.78$$

$$y - 5.4 = 0.7\,(x - 5.3) \qquad y = 0.7x + 1.69$$

$$x - 5.3 = 1.33\,(y - 5.4) \qquad x = 1.73y - 1.838$$

$$y = 0.7 \cdot 7.5 + 1.69 = 6.94$$

4.- Un conjunto de datos bidimensionales (X, Y) tiene **coeficiente de correlación** r = -0.9, siendo las medias de las distribuciones marginales $\bar{x} = 1$, $\bar{y} = 2$. Se sabe que una de las cuatro ecuaciones siguientes corresponde a la **recta de regresión** de Y sobre X:

$y = -x + 2$ $3x - y = 1$ $2x + y = 4$ $y = x + 1$

Seleccionar razonadamente esta **recta**.

Como el **coeficiente de correlación lineal es negativo**, la **pendiente** de la **recta** también será **negativa**, por tanto descartamos la 2ª y 4ª.

Un punto de la recta ha de ser ($\bar{x}$, $\bar{y}$), es decir, (1, 2).

$2 \neq -1 + 2$

$2 \cdot 1 + 2 = 4$

La recta pedida es: $2x + y = 4$.

5.- Las estaturas y pesos de 10 jugadores de baloncesto de un equipo son:

Estatura (X)	186	189	190	192	193	193	198	201	203	205
Pesos (Y)	85	85	86	90	87	91	93	103	100	101

Calcular:

1 La **recta de regresión** de Y sobre X.

2 El **coeficiente de correlación**.

3 El peso estimado de un jugador que mide 208 cm.

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i \cdot y_i$
186	85	34 596	7 225	15 810
189	85	35 721	7 225	16 065
190	86	36 100	7 396	16 340
192	90	36 864	8 100	17 280

193	87	37 249	7 569	16 791
193	91	37 249	8 281	17563
198	93	39 204	8 649	18 414
201	103	40 401	10 609	20 703
203	100	41 209	10 000	20 300
205	101	42 025	10 201	20 705
1 950	921	380 618	85 255	179 971

$\bar{x} = \frac{1950}{10} = 195$ $\qquad$ $\bar{y} = \frac{921}{10} = 92.1$

$\sigma_x^2 = \frac{380618}{10} - 195^2 = 36.8$ $\qquad$ $\sigma_y^2 = \frac{85255}{10} - 92.1^2 = 43.09$

$\sigma_x = \sqrt{36.8} = 6.07$ $\qquad$ $\sigma_y = \sqrt{43.09} = 6.56$

$y - 92.1 = 1.02\,(x - 195)$ $\qquad$ $y = 1.02x - 106.8$

$r = \frac{37.61}{6.07 \cdot 6.56} = 0.94$

Correlación positiva muy fuerte.

$y = 1.02 \cdot 208 - 106.8 = 105.36\text{ kg}$

6.- A partir de los siguientes datos referentes a horas trabajadas en un taller (X), y a unidades producidas (Y), determinar la **recta de regresión** de Y sobre X, el **coeficiente de correlación lineal** e interpretarlo.

Horas (X)	80	79	83	84	78	60	82	85	79	84	80	62
Producción (Y)	300	302	315	330	300	250	300	340	315	330	310	240

x_i	y_i	$x_i \cdot y_i$	x_i^2	y_i^2
80	300	6 400	90 000	24 000
79	302	6 241	91 204	23 858
83	315	6 889	99 225	26 145
84	330	7 056	108 900	27 720
78	300	6 084	90 000	23 400
60	250	3 600	62 500	15 000
82	300	6 724	90 000	24 600
85	340	7 225	115 600	28 900
79	315	6 241	99 225	24 885
84	330	7 056	108 900	27 720
80	310	6 400	96 100	24 800
62	240	3 844	57 600	14 880
936	3 632	73 760	1 109 254	285 908

$$\bar{x} = \frac{936}{12} = 78 \qquad \bar{y} = \frac{3632}{12} = 302.67$$

$$\sigma_x^2 = \frac{73\ 760}{12} - 78^2 = 62.67 \qquad \sigma_y^2 = \frac{1\ 109\ 254}{12} - 302.67^2 = 828.7$$

$$\sigma_x = \sqrt{62.67} = 7.92 \qquad \sigma_y = \sqrt{828.7} = 28.8$$

$y - 302.47 = 3.47\,(x - 78)$ $\qquad$ $y = 3.47x + 32.01$

$$r = \frac{217.41}{7.92 \cdot 28.8} = 0.95$$

Correlación positiva muy fuerte

7.- Se ha solicitado a un grupo de 50 individuos información sobre el número de horas que dedican diariamente a dormir y ver la televisión. La clasificación de las respuestas ha permitido elaborar la siente tabla:

Nº de horas dormidas (X)	6	7	8	9	10
Nº de horas de televisión (Y)	4	3	3	2	1
Frecuencias absolutas (f_i)	3	16	20	10	1

Se pide:

1 Calcular el **coeficiente de correlación**.

2 Determinar la ecuación de la **recta de regresión** de Y sobre X.

3 Si una persona duerme ocho horas y media, ¿cuánto cabe esperar que vea la televisión?

x_i	y_i	f_i	$x_i \cdot f_i$	$x_i^2 \cdot f_i$	$y_i \cdot f_i$	$y_i^2 \cdot f_i$	$x_i \cdot y_i \cdot f_i$
6	4	3	18	108	12	48	72
7	3	16	112	784	48	144	336
8	3	20	160	1280	60	180	480
9	2	10	90	810	20	40	180
10	1	1	10	100	1	1	10
		50	390	3082	141	413	1078

$$\bar{x} = \frac{390}{50} = 7.8 \qquad \bar{y} = \frac{141}{50} = 2.82$$

$$\sigma_x^2 = \frac{3082}{50} - 7.8^2 = 0.8 \qquad \sigma_y^2 = \frac{413}{50} - 2.82^2 = 0.3076$$

$\sigma_x = \sqrt{0.8} = 0.89$ $\sigma_y = \sqrt{0.3076} = 0.55$

$$\sigma_{xy} = \frac{1078}{50} - 7.8 \cdot 2.82 = -0.436$$

$$r = \frac{-0.436}{0.89 \cdot 0.55} = -0.88$$

Es una **correlación negativa y fuerte**.

$$y - 2.82 = \frac{-0436}{0.8}(x - 7.8) \qquad y = -0.545x + 7.071$$

$$y = -0.545 \cdot 8.5 + 7.071 = 2.44 \text{ horas}$$

8.- La tabla siguiente nos da las notas del test de aptitud (X) dadas a seis dependientes a prueba y ventas del primer mes de prueba (Y) en cientos de euros.

X	25	42	33	54	29	36
Y	42	72	50	90	45	48

1 Hallar el **coeficiente de correlación** e interpretar el resultado obtenido.

2 Calcular la **recta de regresión** de Y sobre X. Predecir las ventas de un vendedor que obtenga 47 en el test.

x_i	y_i	$x_i \cdot y_i$	x_i^2	y_i^2
25	42	625	1 764	1 050
42	72	1 764	5 184	3 024
33	50	1 089	2 500	1 650
54	90	2 916	8 100	4 860
29	45	841	2 025	1 305
36	48	1 296	2 304	1 728
209	347	8 531	21 877	13 617

$\bar{x} = \frac{219}{6} = 36.5$ $\bar{y} = \frac{347}{6} = 57.83$

$\sigma_x^2 = \frac{8531}{6} - 36.5^2 = 89.58$ $\sigma_y^2 = \frac{21877}{6} - 57.83^2 = 301.86$

$\sigma_x = \sqrt{89.58} = 9.46$ $\sigma_y = \sqrt{301.86} = 17.37$

$\sigma_{xy} = \frac{13617}{6} - 36.5 \cdot 57.83 = 158.71$

$r = \frac{158.71}{9.46 \cdot 17.37} = 0.97$

$y - 57.83 = 1.77\ (x - 36.5)$ $y = 1.77x - 6.78$

$y = 1.77 \cdot 47 - 6.78 = 76.41$