Resumen: Límites de funciones. Asíntotas

- $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ siempre que se pueda sustituir x = a sin problemas en la expresión de f(x)
- Los casos en los que no se puedan sustituir es:
  - cuando tengamos $\frac{k \neq 0}{0} = \infty$

    Es indeterminado el signo del ∞ y depende de la regla de los signos.

    Ejemplos:

    1)

$$\lim_{x\to 3}\frac{x+1}{x-3} = ?\infty \begin{cases} \lim_{x\to 3^-}\frac{x+1}{x-3} \underset{*}{=} \frac{4}{0^-} = -\infty & *\ \textit{para ver el signo se sustituye en } 2'9 \\ \lim_{x\to 3^+}\frac{x+1}{x-3} \underset{**}{=} \frac{4}{0^+} = +\infty & **\ \textit{para ver el signo se sustituye en } 3'1 \end{cases}$$

2) $\lim_{x\to 1}\frac{x}{(x-1)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$ *porque el denominador es siempre +*

  - Los casos de indeterminación que son

$$\infty - \infty \ ,\ \frac{0}{0} \ ,\ \frac{\infty}{\infty} \ ,\ 0.\infty \ ,\ 1^{\infty} \ ,\ 0^0 \ ,\ \infty^0$$

Indeterminaciones

- $\frac{0}{0}$ de funciones polinómicas: $\lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)} = \left(\frac{P(a)}{Q(a)} = \frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to a}\frac{(\cancel{x-a})\cdot ?}{(\cancel{x-a})\cdot ?}$

  Se divide por Ruffini numerador y denominador entre x-a y se calcula el límite en la expresión simplificada.

  Ejemplos

1) $$\lim_{x\to -1}\frac{2x^2+3x+1}{-4x^3-4x^2+x+1} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{*}{=}} \lim_{x\to -1}\frac{(\cancel{x+1})\cdot(2x+1)}{(\cancel{x+1})\cdot(-4x^2+1)} = \lim_{x\to -1}\frac{2x+1}{-4x^2+1} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$

* Dividimos numerador y denominador entre x+1 por Ruffini

$$\begin{array}{r|rrr} & 2 & 3 & 1 \\ -1 & & -2 & -1 \\ \hline & 2 & 1 & \boxed{0} \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} & -4 & -4 & 1 & 1 \\ -1 & & 4 & 0 & -1 \\ \hline & -4 & 0 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

2)

$$\lim_{x\to 2}\frac{-x^4+4x^3-16x+16}{x^3-3x^2+4} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{*}{=}} \lim_{x\to 2}\frac{(\cancel{x-2})\cdot(-x^3+2x^2+4x-8)}{(\cancel{x-2})\cdot(x^2-x-2)} = \lim_{x\to 2}\frac{-x^3+2x^2+4x-8}{x^2-x-2} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{*}{=}}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{(\cancel{x-2})\cdot(-x^2+4)}{(\cancel{x-2})\cdot(x+1)} = \lim_{x\to 2}\frac{-x^2+4}{x+1} = \frac{0}{3} = 0$$

* Dividimos numerador y denominador entre x-2 por Ruffini

$$\begin{array}{c|rrrrr} & -1 & 4 & 0 & -16 & 16 \\ 2 & & -2 & 4 & 8 & -16 \\ \hline & -1 & 2 & 4 & -8 & \boxed{0} \\ 2 & & -2 & 0 & 8 & \\ \hline & -1 & 0 & 4 & 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{c|rrrr} & 1 & -3 & 0 & 4 \\ 2 & & 2 & -2 & -4 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & \boxed{0} \\ 2 & & 2 & 2 & \\ \hline & 1 & 1 & \boxed{0} & \end{array}$$

- $\frac{0}{0}$ de funciones irracionales: se multiplica numerador y denominador por el conjugado

Ejemplos

1)

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-\sqrt{2x^2-1}}{x-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{(x-\sqrt{2x^2-1})\cdot(x+\sqrt{2x^2-1})}{(x-1)\cdot(x+\sqrt{2x^2-1})}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-(2x^2-1)}{(x-1)\cdot(x+\sqrt{2x^2-1})}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-x^2+1}{(x-1)\cdot(x+\sqrt{2x^2-1})}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\cdot(-x-1)}{(x-1)\cdot(x+\sqrt{2x^2-1})}=\lim_{x\to 1}\frac{-x-1}{x+\sqrt{2x^2-1}}=\frac{-2}{2}=-1$$

2)

$$\lim_{x\to 0}\frac{3-\sqrt{x+9}}{-5+\sqrt{x+25}}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{(3-\sqrt{x+9})\cdot(3+\sqrt{x+9})\cdot(-5-\sqrt{x+25})}{(-5+\sqrt{x+25})\cdot(-5-\sqrt{x+25})\cdot(3+\sqrt{x+9})}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{[9-(x+9)]\cdot(-5-\sqrt{x+25})}{[25-(x+25)]\cdot(3+\sqrt{x+9})}=\lim_{x\to 0}\frac{-x\cdot(-5-\sqrt{x+25})}{-x\cdot(3+\sqrt{x+9})}=\lim_{x\to 0}\frac{-5-\sqrt{x+25}}{3+\sqrt{x+9}}=\frac{-5-5}{3+3}=\frac{-10}{6}$$

Si observáis los ejercicios anteriores esta indeterminación al igual que en las funciones racionales se termina cuando:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to a}\frac{(x-a)\cdot ?}{(x-a)\cdot ?}$$

Límites de polinomios en ∞

Sea un polinomio p(x) = $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + a_1 x + a_0$

$\lim_{x\to\infty} p(x)=\lim_{x\to\infty}(a_n x^n)=?\infty$ El signo del ∞ se obtiene con la regla de los signos

Ejemplos

1) $\lim_{x\to+\infty}(-5x^4+2x^3-x+2)=\lim_{x\to+\infty}(-5x^4)=-\infty$ **2)** $\lim_{x\to-\infty}(-5x^4+2x^3-x+2)=\lim_{x\to-\infty}(-5x^4)=-\infty$

3) $\lim_{x\to+\infty}(-2x^7+4x^2+1)=\lim_{x\to+\infty}(-2x^7)=-\infty$

4) $\lim_{x\to-\infty}(-2x^7+4x^2+1)=\lim_{x\to-\infty}(-2x^7)=+\infty$

5) $\lim_{x\to+\infty}(4x^5-9x^3+x)=\lim_{x\to+\infty}(4x^5)=+\infty$

6) $\lim_{x\to-\infty}(4x^5-9x^3+x)=\lim_{x\to-\infty}(4x^5)=-\infty$

Indeterminación ∞/∞ de funciones racionales e irracionales

Se resuelve dividiendo numerador y denominador entre x^p siendo p la mayor potencia de numerador y denominador. Se puede obtener la siguiente regla:

$$\lim_{x\to a}\frac{p(x)}{q(x)}=\lim_{x\to a}\frac{a_nx^n+.....}{b_mx^m+.....}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{b_m} & si\ \ n=m\\ 0 & si\ \ n<m\\ \infty & si\ \ n>m\ \ (El\ \ signo\ del\ \infty\ depende\ de\ la\ regla\ de\ los\ signos)\end{cases}$$

Ejemplos

1) $\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^5-9x^3+x}{x-2x^5-x^2}=\frac{4}{-2}=-2$

2) $\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^6-x^3+1}{-2x^5-3x^2}=-\infty$ *(en $+\infty$: $4x^6$ es + y $-2x^5$ es -)*

3) $\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^4+2x^3+x}{x^6-3x^2+1}=0$

4) $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^8+x^5-1}{-x^3-3x^2}=+\infty$ *(en $-\infty$: x^8 es + y $-x^3$ es +)*

5) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{\sqrt{9x^4-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2-1}{x^2}}{\frac{\sqrt{9x^4-x}}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{x^2}}{\sqrt{\frac{9x^4-x}{x^4}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{x^2}}{\sqrt{9-\frac{1}{x^3}}}=\frac{1-0}{\sqrt{9-0}}=\frac{1}{3}$$

Indeterminación $\infty - \infty$

Tipo 1

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x-1}-\frac{x^3}{x+1}\right)\overset{\infty-\infty}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\cdot(x+1)-x^3\cdot(x-1)}{(x-1)\cdot(x+1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^4+2x^3+x^2}{x^2-1}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{x+1}-\frac{x^4-x^3-2x^2}{x^2-1}\right)\overset{\infty-\infty}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3\cdot(x-1)-x^4+x^3+2x^2}{x^2-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2-1}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}2$$

Tipo 2

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{4x^2-1}-2x)\overset{\infty-\infty}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{4x^2+x}-2x)\cdot(\sqrt{4x^2+x}+2x)}{\sqrt{4x^2+x}+2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2+x-4x^2}{\sqrt{4x^2+x}+2x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{4x^2+x}+2x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\frac{1}{\sqrt{4}+2}=\frac{1}{4}$$

Límites de funciones a trozos

$$f(x)=\begin{cases} 3-x & x<1 \\ \dfrac{4x-4}{x^2-1} & 1\le x<3 \\ \dfrac{1}{x-3} & 3\le x<6 \\ 4 & x\ge 6 \end{cases}$$

- $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$: *como a izquierda y derecha de 1 hay funciones diferentes es necesario calcular límites laterales:*

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(3-x)=2 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{4x-4}{x^2-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(x-1)\cdot 4}{(x-1)\cdot(x+1)}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{4}{x+1}=2 \end{array}\right\}\Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$$

- $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$: *como a izquierda y derecha de 3 hay funciones diferentes es necesario calcular límites laterales:*

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{4x-4}{x^2-1}=\dfrac{8}{8}=1 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{1}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{1}{0^+}=+\infty \end{array}\right\}\Rightarrow \textbf{no}\ \exists \lim\limits_{x\to 3} f(x) \quad (\text{en } x=3 \text{ hay una D.I.S.I})$$

- $\lim\limits_{x\to 6} f(x)$: *como a izquierda y derecha de 6 hay funciones diferentes es necesario calcular límites laterales:*

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 6^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 6^-}\dfrac{1}{x-3}=\dfrac{1}{3} \\ \lim\limits_{x\to 6^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 6^+}4=\lim\limits_{x\to 3^+}4 \end{array}\right\}\Rightarrow \textbf{no}\ \exists \lim\limits_{x\to 3} f(x) \quad (\text{en } x=6 \text{ hay una D.I.S.F})$$

- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}4=4$

- $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}(3-x)=-\infty$

Asíntotas de una función

Asíntotas verticales

Las posibles A.V. de una función y = f(x) se encuentran entre los x que anulan el denominador y aquellos x que son frontera del dominio de la función. Además para que x = a sea A. V se tiene que cumplir que $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ o alguno de sus límites laterales.

Asíntotas horizontales

Si $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=b \Rightarrow$ la recta y = b es A.H. en +∞

Si $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=c \Rightarrow$ la recta y = c es A.H. en -∞

Asíntotas oblicuas

Cuando una función no tiene A.H. puede tenerlas oblicuas y se calculan de la siguiente forma:

y = mx + n es A.O. cuando $\exists m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ y $\exists n = \lim_{x\to\infty}(f(x) - mx)$

Ejemplos: Calcula las asíntotas de las siguientes funciones

1) f(x) = $\frac{x^2 - 2x}{2x^2 - 8}$

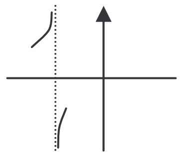
A.V. : $2x^2 - 8 = 0 \Rightarrow$ x = -2 y x = 2 son posibles A.V.

Para ver si lo son se calculan los siguientes límites:

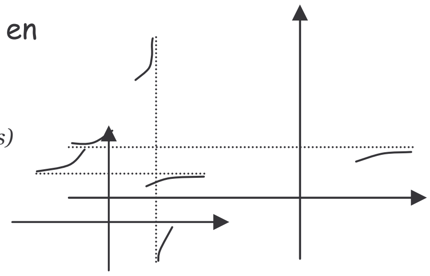
$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 2x}{2x^2 - 8} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 2} \frac{x\cdot(x-2)}{2\cdot(x-2)\cdot(x+2)} = \lim_{x\to 2} \frac{x}{2\cdot(x+2)} = \frac{2}{8} \Rightarrow$$ **x = 2 no es A.V.**

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2 - 2x}{2x^2 - 8} = \frac{8}{0} = \infty \Rightarrow$$ **x = -2 es A.V.** y para dibujar la función alrededor de la asíntota:

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2 - 2x}{2x^2 - 8} = \frac{8}{0} = \begin{cases} \lim_{x\to -2^-} \frac{x}{2(x+2)} = \frac{-2}{0^-} = +\infty & \text{sustituyendo en } -2'1 \\ \lim_{x\to -2^+} \frac{x}{2(x+2)} = \frac{-2}{0^+} = -\infty & \text{sustituyendo en } -1'9 \end{cases}$$



A.H. : Para ver si existen se calcula el límite de la función en $\pm\infty$



$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 - 2x}{2x^2 - 8} = \frac{1}{2}$$ *(porque el grado del numerador y denominador son iguales)*

$\Rightarrow$ y = ½ es A.H. en +∞ y -∞

Dibujamos la función alrededor de la A.H.

En +∞ se sustituye en 100: f(100) = $\frac{100}{204}$ = 0'49

En -∞ se sustituye en -100: f(-100) = $\frac{-100}{-196}$ = 0'51

A.O. : no hay puesto que existen horizontales

2) f(x) = $\frac{x^3 - 2x}{x^2 + 1}$

A.V. : no existen porque $x^2 + 1 \neq 0$

A.H. : no existen porque $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty$

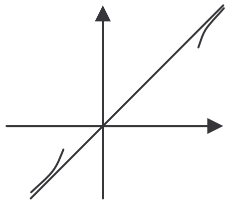
A.O. : y = mx + n

m = $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ = $\lim_{x\to\infty} (\frac{x^3 - 2x}{x^2 + 1} : x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 2x}{x^3 + x} = 1$

n = $\lim_{x\to\infty}(f(x) - mx)$ = $\lim_{x\to\infty} (\frac{x^3 - 2x}{x^2 + 1} - x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 2x - x\cdot(x^2+1)}{x^2 + 1}$ =

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 2x - x^3 - x}{x^2 + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{-3x}{x^2 + 1} = 0 \text{ (porque el grado numerador < grado denominador)}$$

3) Así y = x es A.O.



Dibujo la función alrededor de la A.O.

En +∞ se sustituye en 100: $\begin{cases} f(100) = 99'97 \\ recta = 100 \end{cases}$

En -∞ se sustituye en -100: $\begin{cases} f(-100) = -99'97 \\ recta = -100 \end{cases}$

***Observación importante*: toda función racional donde el grado del denominador sea una unidad menor que el grado del numerador tiene A.O. (no tiene A.H)**

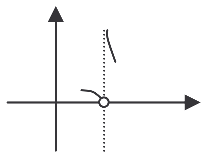
Otro tipo de límites

Cuando se calcula un límite y aparece ∞ en el exponente siempre hay que estudiar su signo como en los siguientes casos:

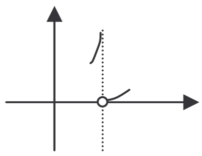
$$a^{+\infty}\begin{cases} +\infty & si \quad a>1 \\ 0 & si \quad 0<a<1 \end{cases} \qquad\qquad a^{-\infty}\begin{cases} 0 & si \quad a>1 \\ +\infty & si \quad 0<a<1 \end{cases}$$

Ejemplos

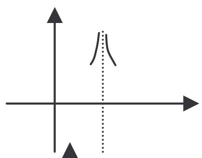
1) $\lim_{x\to 1}(3x-1)^{\frac{5}{x-1}}$ = 2 $^{\infty}$ = $\begin{cases} 1^- : 2^{\frac{5}{0^-}} = 2^{-\infty} = 0 & (se \ \ sustituye \ \ 0'9 \ \ en \ \ x-1 : \ signo \ -) \\ 1^+ : 2^{\frac{5}{0^+}} = 2^{+\infty} = +\infty & (se \ \ sustituye \ \ 1'1 \ \ en \ \ x-1 : \ signo +) \end{cases}$



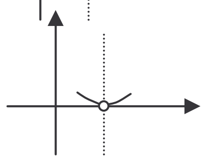
2) $\lim_{x\to 1}(3x-1)^{\frac{5}{1-x}}$ = 2 $^{\infty}$ = $\begin{cases} 1^- : 2^{\frac{5}{0^+}} = 2^{+\infty} = +\infty & (se \ \ sustituye \ \ 0'9 \ \ en \ \ 1-x : \ signo \ +) \\ 1^+ : 2^{\frac{5}{0^-}} = 2^{-\infty} = 0 & (se \ \ sustituye \ \ 1'1 \ \ en \ \ 1-x : \ signo -) \end{cases}$



4) $\lim_{x\to 1}(3x-1)^{\frac{5}{(x-1)^2}}$ = 2 $^{+\infty}$ = + ∞

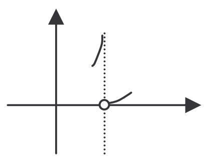


En todos los ejemplos anteriores x = 1 es A.V.



5) $\lim_{x\to 1}(3x-1)^{\frac{-5}{(x-1)^2}}$ = 2 $^{-\infty}$ = 0

6) $\lim_{x\to 2}\left(\frac{x+1}{x^2+2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$ = $\left(\frac{1}{2}\right)^{\infty}$ $\begin{cases} 2^- : \left(\frac{1}{2}\right)^{-\infty} = 2^{+\infty} = +\infty & (se \ \ sustituye \ \ 1'9 \ \ en \ \ x-2 : \ signo \ -) \\ 2^+ : \left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty} = 0 & (se \ \ sustituye \ \ 2'1 \ \ en \ \ x-2 : \ signo \ +) \end{cases}$



Indeterminación 1$^{\infty}$

Nos basamos en el siguiente resultado: $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} \overset{1^{\infty}}{=} e$

Ejemplos

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2-3x^2}{x-3x^2}\right)^x$ = 1^∞ indeterminación

$$1+\frac{1}{f(x)} = \frac{2-3x^2}{x-3x^2} \Rightarrow \frac{1}{f(x)} = \frac{2-3x^2}{x-3x^2} - 1 = \frac{2-3x^2-(x-3x^3)}{x-3x^2} = \frac{2-x}{x-3x^2} \Rightarrow f(x) = \frac{x-3x^2}{2-x}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2-3x^2}{x-3x^2}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x-3x^2}{2-x}}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x-3x^2}{2-x}}\right)^{\frac{x-3x^2}{2-x}\cdot\frac{2-x}{x-3x^2}\cdot x} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x-3x^2}{2-x}}\right)^{\frac{x-3x^2}{2-x}}\right]^{\frac{2-x}{x-3x^2}\cdot x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x-3x^2}{2-x}}\right)^{\frac{x-3x^2}{2-x}}\right]^{\frac{2x-x^2}{x-3x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x-x^2}{x-3x^2}} = e^{1/3}$$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x}\right)^{\frac{x^3}{x+1}}$ = 1^∞ indeterminación

$$1+\frac{1}{f(x)} = \frac{3x-1}{3x} \Rightarrow \frac{1}{f(x)} = \frac{3x-1}{3x} - 1 = \frac{3x-1-3x}{3x} = \frac{-1}{3x} \Rightarrow f(x) = -3x$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{3x}\right)^{\frac{x^3}{x+1}} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-3x}\right)^{\frac{x^3}{x+1}} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-3x}\right)^{-3x\cdot\frac{1}{-3x}\cdot\frac{x^3}{x+1}} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-3x}\right)^{-3x}\right]^{\frac{1}{-3x}\cdot\frac{x^3}{x+1}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3}{-3x^2+1}} = e^{-\infty} = 0$$